

DEVOIR DE CONTROLE N°1 EN MATHÉMATIQUES

Enseignant : H. Salem

❖❖❖ DURÉE : 2 HEURES ❖❖❖

Le 09 – 11 – 2011

Exercice 1 : (3pts)

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Indiquer sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Justifier votre réponse.

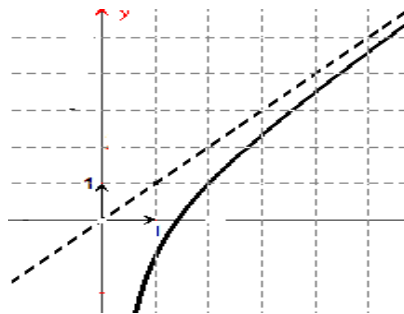
1) On pose $U_n = n \sin\left(\frac{(-1)^n}{n\pi}\right)$

- a) (U_n) est divergente.
- b) (U_n) converge vers $\frac{1}{\pi}$.
- c) (U_n) converge vers $\frac{-1}{\pi}$.

2) La courbe (C) ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $]0, +\infty[$. La droite Δ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x f\left(\frac{1}{x}\right) = :$

- a) 1
- b) 0
- c) $+\infty$



3) Si $Z = 1 + i$ alors $Z^{2012} = :$

- a) 2^{1006}
- b) -2^{1006}
- c) i

Exercice 2 : (5pts)

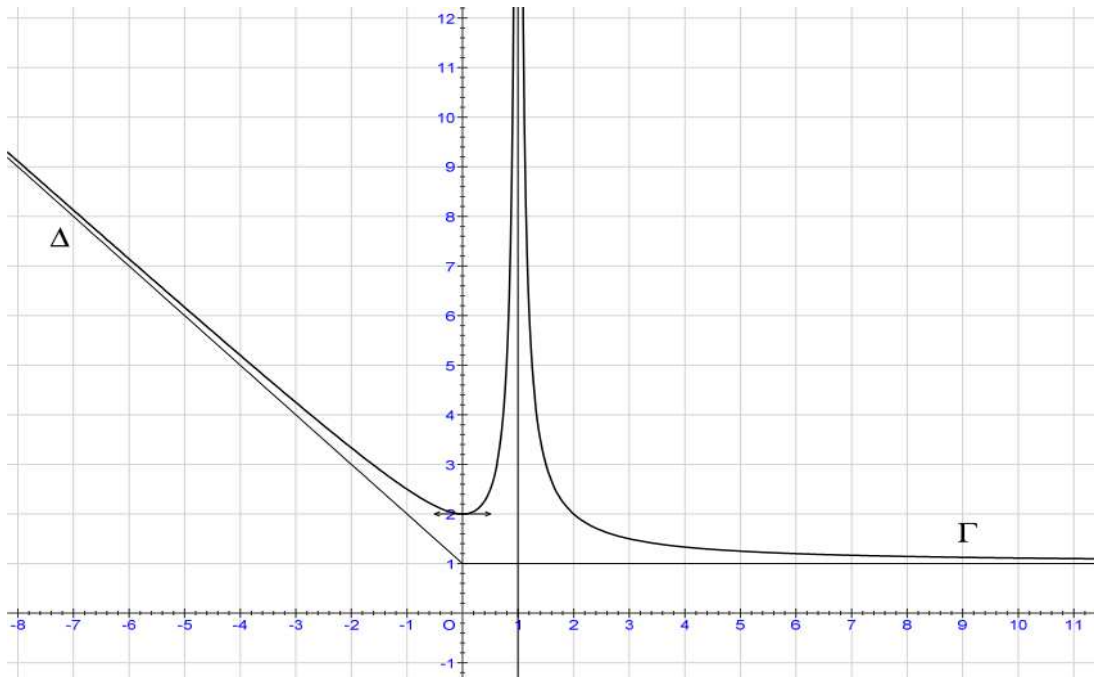
Soit (U_n) la suite définie par $U_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^2}\right)$, $n \geq 1$

- 1) a) Calculer U_1 , U_2 et U_3 .
- b) Montrer que (U_n) est croissante.
- 2) a) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
- b) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, $U_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.

c) En déduire que (U_n) converge vers un réel ℓ et que $\frac{49}{36} \leq \ell \leq 2$.

Exercice 3 : (5pts)

Dans la figure ci-dessous Γ est la courbe représentative d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. On sait que la droite Δ est une asymptote à Γ au voisinage de $-\infty$. Γ admet deux autres asymptotes d'équations respectives $x = 1$ et $y = 1$.



1) a) Par une lecture graphique déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$

b) Dresser le tableau de variation de f .

2) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = \begin{cases} f \circ f(x) & ; x \neq 1 \\ 1 & ; x = 1 \end{cases}$

a) Déterminer $g(2)$, $g(0)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

b) Montrer que g est continue sur \mathbb{R} .

c) Déterminer l'image de l'intervalle $]-\infty, 1[$ par g .

Exercice 4 : (7pts)

Pour tout $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on considère l'équation $(E_\theta): z^2 - z + e^{2i\theta} - ie^{i\theta} = 0$.

1) a) Calculer $(1 + 2ie^{i\theta})^2$

b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E_θ) .

- 2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On désigne par A, M' et M'' les points d'affixes respectives 1, $z' = 1 + e^{i\theta}$ et $z'' = -ie^{i\theta}$.
- Écrire z' et z'' sous forme exponentielle.
 - Montrer que le quadrilatère OM'AM'' est un parallélogramme.
 - Déterminer θ pour que OM'AM'' soit un losange.
- 3) Soit l'équation (E) : $(z + 2i)^3 = 4\sqrt{2}(1 + i)$.
- Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $4\sqrt{2}(1 + i)$.
 - Déterminer les solutions de (E) sous forme algébrique.

BON TRAVAIL

CORRECTION

EXERCICE 1: (3 pts)

Barème : Pour chaque question : (0.5 pt) pour la réponse et (0.5pt) pour la justification.

1) a) (U_n) diverge. En effet,

$$U_{2n} = 2n \sin\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin\left(\frac{1}{2n\pi}\right)}{\frac{1}{2n\pi}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi}$$

$$U_{2n+1} = (2n+1) \sin\left[\frac{-1}{(2n+1)\pi}\right] = -\frac{1}{\pi} \frac{\sin\left[\frac{-1}{(2n+1)\pi}\right]}{\frac{1}{(2n+1)\pi}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\pi}$$

$$\lim_n U_{2n} \neq \lim_n U_{2n+1}$$

2) a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = 1$

(car la droite d'équation $y = x$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$).

3) b) $Z^{2012} = ((1+i)^2)^{1006} = (2i)^{1006} = -2^{1006}$

ou encore, $Z^{2012} = (1+i)^{2012} = \left(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^{2012} = 2^{1006}e^{i503\pi} = -2^{1006}$.

EXERCICE 2: (5 pts)

1) a) $U_1 = 1$, $U_2 = 1 + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}$, $U_3 = 1 + \frac{5}{4} + \frac{1}{3^2} = 1 + \frac{5}{4} + \frac{1}{9} = \frac{49}{36}$. (1,5 pts)

$$b) U_{n+1} - U_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

donc (U_n) est croissante. (0, 5 pt)

2) a) $\forall k \geq 2$, $k^2 \geq k^2 - k \Rightarrow \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k^2 - k}$ or $\frac{1}{k^2 - k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ d'où $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. (1 pt)

$$b) \forall n \geq 2, U_n = 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k^2}\right) \leq 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \leq 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1}\right) - \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\Rightarrow U_n \leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{1}{k}\right) - \left(\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n}. \text{ (1 pt)}$$

c) (U_n) croissante et majorée par 2 donc converge vers un réel (0,5 pt)

De plus $U_3 \leq U_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2$ donc $\frac{49}{36} \leq \ell \leq 2$. (0,5 pt)

EXERCICE 3: (5 pts)

1) a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = -1$ car $\Delta: y = -x - 1$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty. \text{ (1pt)}$$

b) T.V de f : (1pt).

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		+	-
f	$+\infty$		$+\infty$	1

2) a) $g(2) = f \circ f(2) = f(2) = 2$, $g(0) = f \circ f(0) = f(2) = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f \circ f(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f \circ f(x) = 1 \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1. \text{ (1pt)}$$

b) g est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ car f continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(\mathbb{R} \setminus \{1\}) =]1, +\infty[\subset \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f \circ f(x) = 1 = g(1) \text{ donc } g \text{ continue en } 1.$$

Ainsi f est continue sur \mathbb{R} . (1pt).

c) $g] -\infty, 1[= f \circ f] -\infty, 1[= f[2, +\infty[=]1, 2]$ (1pt)

EXERCICE 4: (7pts)

1) a) $(1 + 2ie^{i\theta})^2 = 1 + 4ie^{i\theta} - 4e^{2i\theta}$. (0,5pt)

b) $\Delta = (-1)^2 - 4(e^{2i\theta} - ie^{i\theta}) = (1 + 2ie^{i\theta})^2$

$$Z' = \frac{1+1+2ie^{i\theta}}{2} = 1 + ie^{i\theta} \text{ et } Z'' = \frac{1-(1+2ie^{i\theta})}{2} = -ie^{i\theta}. \text{ (1pt)}$$

2) a) $Z' = 1 + ie^{i\theta} = 1 + e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$. (0,75pt)

$$2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) > 0, \text{ car si } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$$

$$Z'' = -ie^{i\theta} = e^{-i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\theta} = e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}$$
. (0,75pt)

b) $\text{aff}(\overrightarrow{OM'}) = Z' = 1 + ie^{i\theta}$. $\text{aff}(\overrightarrow{M''A}) = 1 - Z'' = 1 - (-ie^{i\theta}) = 1 + ie^{i\theta}$.

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{M''A} \Leftrightarrow OM'AM'' \text{ est un parallélogramme. (1pt)}$$

c) $OM'AM''$ est un losange si et seulement si $OM' = OM'' \Leftrightarrow |Z'| = |Z''|$

$$\Leftrightarrow \left| 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \right| = \left| e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)} \right| \Leftrightarrow 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \quad \left(\frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}\right) \text{ (1pt)}$$

3) a) $4\sqrt{2}(1+i) = 8 e^{i\frac{\pi}{4}}$. Les racines cubiques de $4\sqrt{2}(1+i)$ sont définies par les $Z_k = 2e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)}$, $k \in \{0,1,2\}$. $Z_0 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{12}\right)}$, $Z_1 = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$, $Z_2 = 2e^{i\left(\frac{17\pi}{12}\right)}$ (1pt)

b) $(Z+2i)^3 = 4\sqrt{2}(1+i) \Leftrightarrow Z+2i$ est une racine cubique de $4\sqrt{2}(1+i)$

$$\Leftrightarrow Z+2i = 2e^{i\frac{\pi}{12}} \text{ ou } Z+2i = 2e^{i\frac{5\pi}{12}} \text{ ou } Z+2i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow Z = 2\cos\frac{\pi}{12} + i(2\sin\frac{\pi}{12} - 2) \text{ ou } Z = 2\cos\frac{3\pi}{4} + i(2\sin\frac{3\pi}{4} - 2)$$

$$\text{ou } Z = 2\cos\frac{17\pi}{12} + i(2\sin\frac{17\pi}{12} - 2).$$

$$\text{Or } \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \text{ et } \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

$$S_c = \left\{ \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} - 2\right), -\sqrt{2} + i(\sqrt{2} - 2), -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} - i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} - 2\right) \right\} \text{ (1pt)}$$